



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa pe școală, București, 13 februarie 2026

CLASA a VII-a - Soluții și barem

Problema 1

- a) Arătați că numărul $N = \sqrt{1 + 2 + 3 + \dots + 49}$ este număr natural.
- b) Pentru câte numere naturale \overline{abc} , de trei cifre, numărul $\sqrt{\overline{abc} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + \overline{abc})}$ este rațional?

Soluție:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 49 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 35^2$, deci $N = 35 \in \mathbb{N}$ **10p**
- b) $\sqrt{\overline{abc} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + \overline{abc})} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\overline{abc} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + \overline{abc})$ este pătrat perfect **2, 5p**
 $1 + 2 + 3 + \dots + \overline{abc} = \frac{\overline{abc} \cdot (\overline{abc} + 1)}{2}$, care implică $\overline{abc}^2 \cdot \frac{\overline{abc} + 1}{2}$ pătrat perfect, deci $\frac{\overline{abc} + 1}{2}$ pătrat perfect. Obținem $\overline{abc} = 2k^2 - 1$, unde $k \in \{8, 9, \dots, 22\}$, în total 15 numere **10p**

Problema 2

- a) Aflați $x \in \mathbb{Q}$ știind că $(2x + 5) \cdot \sqrt{32} + (1 - 5x) \cdot \sqrt{128}$ este număr rațional.
- b) Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Arătați că, dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{N}$, atunci a și b sunt pătrate perfecte.
- c) Aflați numerele naturale \overline{abcd} cu proprietatea că $\sqrt{\overline{abcd} - 1} + \sqrt{\overline{abcd} + 183} \in \mathbb{N}$.

Soluție:

- a) $(2x + 5) \cdot \sqrt{32} + (1 - 5x) \cdot \sqrt{128} = 8x\sqrt{2} + 20\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 40x\sqrt{2} = 28\sqrt{2} - 32x\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (28 - 32x)$ **5p**
 Cum $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $28 - 32x \in \mathbb{Q}$, rezultă că $28 - 32x = 0$, de unde $x = \frac{7}{8}$ **5p**
- b) Fie $\sqrt{a} + \sqrt{b} = q, q \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\sqrt{a} = q - \sqrt{b}$, de unde obținem, prin ridicare la pătrat, că $a = q^2 + b - 2q\sqrt{b}$, care implică $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, deci a, b pătrate perfecte **5p**

- c) Folosind b), avem $\overline{abcd} - 1 = m^2, m > 31$, și $\overline{abcd} + 183 = n^2, n < 101$, cu $m, n \in \mathbb{N}$ **2, 5p**
 Obținem $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m) = 184$ **2, 5p**
 După analiza tuturor cazurilor posibile, găsim soluția $\overline{abcd} = 2026$ **2, 5p**

Problema 3 Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și $AD \perp BC, D \in BC$. În exteriorul triunghiului ABC construim pătratul $BCEF$. Știm că AE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAC$. Aflați măsura unghiului $\sphericalangle BAE$.

Raluca Ciurcea, supliment G.M. 10/2025

Soluție: $AD \perp BC$ și $CE \perp BC$ implică $AD \parallel CE$ **2, 5p**
 Atunci $\sphericalangle CAE = \sphericalangle EAD = \sphericalangle AEC$, deci $\triangle ACE$ isoscel, de unde $AC = CE$ **5p**
 Cum $CE = BC$, rezultă că $AC = BC$, deci triunghiul ABC este isoscel **5p**
 Notăm $x = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$. Atunci, din $\triangle DAC$, obținem $\sphericalangle ACD = 90^\circ - 2x$ (1) **2, 5p**
 Iar din triunghiul isoscel ABC rezultă $\sphericalangle BAC = \frac{180^\circ - \sphericalangle ACB}{2} = 45^\circ + x$ (2) **5p**
 Din (1) și (2) obținem $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAE = 45^\circ - x + x = 45^\circ$ **2, 5p**

Problema 4 Fie $ABCD$ un paralelogram și $\{O\} = AC \cap BD$. Notăm cu I_1 și I_2 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile AOB , respectiv COD , și cu G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor BOC , respectiv AOD . Demonstrați că:

- AI_1CI_2 este paralelogram.
- $I_1G_1I_2G_2$ este paralelogram.
- Dacă $I_1G_1I_2G_2$ este romb, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

Traian Preda

Soluție:

- I_1, O, I_2 sunt coliniare (fiind pe bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf) .. **2, 5p**
 $\sphericalangle I_1AO \equiv \sphericalangle I_2CO$ (AI_1, CI_2 fiind bisectoarele unor unghiuri congruente), de unde rezultă $\triangle AOI_1 \equiv \triangle COI_2 (U.L.U.)$ **2, 5p**
 Obținem $OI_1 = OI_2$ și cum $AO = OC$ rezultă AI_1CI_2 paralelogram **2, 5p**
- Fie M și N mijloacele laturilor BC , respectiv AD . Atunci $MN \parallel AB, MN = AB$ și $O \in MN, MO = ON$ **2, 5p**
 Deci G_1, O, G_2 coliniare și $OG_1 = OG_2 = \frac{1}{3}OM = \frac{1}{6}AB$. Dar $OI_1 = OI_2$, așadar $I_1G_1I_2G_2$ paralelogram **5p**

- c) $I_1G_1I_2G_2$ romb implică $I_1I_2 \perp G_1G_2$, deci $OI_1 \perp OG_1$. Cum $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, bisectoarele lor sunt perpendiculare, de unde rezultă că OG_1 este bisectoarea $\sphericalangle BOC$ **5p**
 Însă OG_1 este și mediană, așadar $\triangle BOC$ este isoscel. Atunci $OB = OC$, deci $BD = AC$, care implică $ABCD$ dreptunghi **2, 5p**

NOTĂ: La punctajul obținut se adaugă cele 10 puncte din oficiu.